

Calcul intégral – Fiche de cours

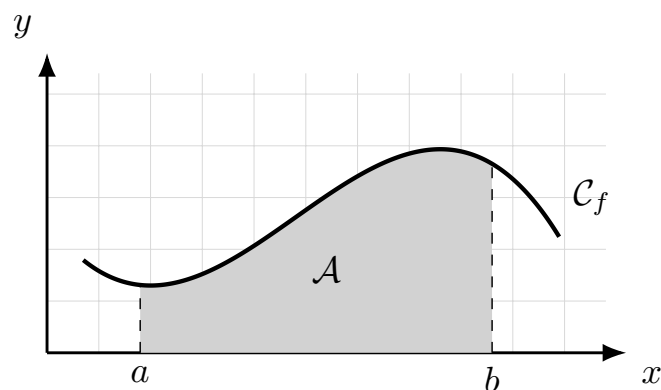
1. Aires et intégrales

1.1 Intégrale d'une fonction positive

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

L'aire du domaine délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est appelée **intégrale de f de a à b** et se note :

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

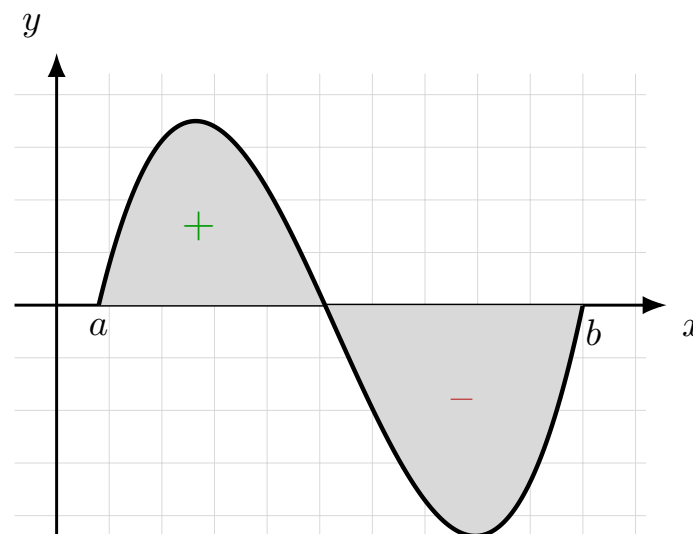


Remarque : Si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx$ représente une aire, donc un nombre positif.

1.2 Intégrale et aire algébrique

Définition : Si la courbe coupe l'axe des abscisses, les parties situées au-dessus de l'axe sont comptées **positivement** et celles situées en dessous sont comptées **négativement**.

La somme algébrique obtenue est l'intégrale de la fonction sur l'intervalle considéré.



1.3 Théorème fondamental

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a \in I$.

La fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est la primitive de f sur I qui s'annule en a .

Remarque : Autrement dit, si f est continue, alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable et vérifie :

$$F'(x) = f(x).$$

1.4 Calcul d'une intégrale avec une primitive

Propriété : Si f est continue sur un intervalle I et si F est une primitive de f sur I , alors pour tous réels a et b de I ,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

2. Propriétés et applications

2.1 Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle contenant a , b et c .

Permutation des bornes :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Linéarité : pour tous réels α et β ,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Positivité : si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

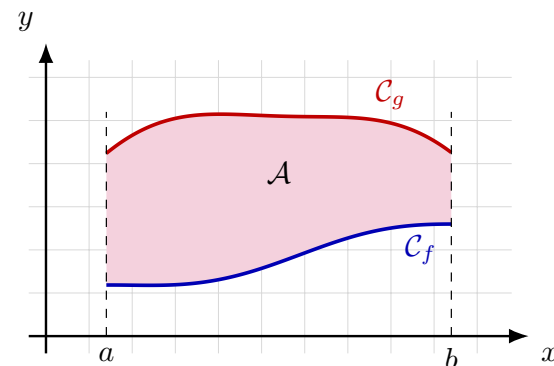
Ordre : si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

2.2 Aire entre deux courbes

Propriété : Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$, alors l'aire comprise entre les courbes de f et de g vaut :

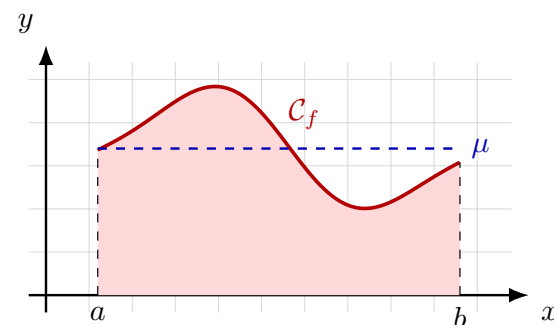
$$\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$



2.4 Valeur moyenne d'une fonction

Définition : La **valeur moyenne** d'une fonction continue f sur $[a, b]$ est le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



Remarque : Cette valeur moyenne correspond à la hauteur du rectangle de base $[a, b]$ ayant la même aire que la surface sous la courbe de f .

3. Intégration par parties

Propriété : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Alors, pour tous réels a et b de I ,

$$\int_a^b u v' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u' v dx$$